Bang". Isso teria de ser feito porque esses teoremas não constroem esse momento passado explicitamente; o que fazem é antes usar o artifício do *reductio ad absurdum* para mostrar que sua não-existência resultaria em contradição lógica. A lição importante a aprender aqui é que a noção do que é "verdade" sobre o universo parece depender de nossa filosofia da matemática. Esse é o preço a pagar por viver num mundo tão evidentemente matemático.

O construtivista é claramente um primo próximo do filósofo operacionalista, que define as coisas pelos processos pelos quais elas podem ser implementadas ou construídas. A quantidade física mais interessante sob esse aspecto é "tempo", que, se definido em termos dos processos pelos quais é registrado, permite que consideremos que o universo tem uma idade passada infinita, caso haja medidas básicas de coisas que ocorrem nele que se tornem cada vez mais lentas à medida que retrocedemos no passado.

A filosofia construtivista conduz naturalmente ao conceito de computadores, pois a construção passo a passo das formulações matemáticas é o que eles fazem. A essência de todos os computadores equivale meramente a uma capacidade de ler uma seqüência de números inteiros e transformá-los em uma outra seqüência de números inteiros. Essa capacidade, a despeito de sua aparente banalidade, é tudo o que as atividades dos mais potentes computadores do mundo exigem. Sua excelência como máquinas de cálculo reside na velocidade em que podem efetuar essas operações, ao lado da capacidade que por vezes têm de realizar várias delas simultaneamente. Essa habilidade, que está no cerne de todos os aparelhos de calcular, é a essência da *máquina de Turing*, assim chamada a partir do nome do matemático inglês Alan Turing. O termo "máquina de Turing" é usado para definir a capacidade de qualquer dispositivo lógico que opere passo a passo.

Originalmente, tinha-se a esperança de que um aparelho hipotético desse tipo seria capaz de realizar toda e qualquer operação matemática, permitindo assim que todas as verdades confirmáveis da matemática fossem mecanicamente catalogadas. Alan Turing, Alonzo Church e Emil Post foram os primeiros a mostrar que isso não seria possível. Existem operações matemáticas — chamadas *funções não-computáveis* — que não podem ser efetuadas por nenhuma máquina de Turing. Evidentemente, existem além disso operações que a máquina pode efetuar passo a passo, mas que só se completariam dentro de milhões de anos, mesmo que se usassem as máquinas mais velozes disponíveis. Para todos os fins práticos, essas são também operações não-computáveis e, de fato, formam a base de muitas formas modernas de cifragem. Elas são, entretanto, qualitativamente diferentes de funções não-computáveis, na medida em que essas últimas exigiriam um período infinito de tempo para que qualquer máquina de Turing as efetuasse: a máquina de Turing jamais chegaria à fase de imprimir o resultado final.

Se verdadeira, a visão construtivista da matemática tem diversas revelações iluminadoras a fazer sobre o universo matemático. Formula sob uma nova luz a questão de por que a matemática é tão incompreensivelmente eficaz na descrição do mundo real. Essa eficácia é equivalente ao fato de tantas operações matemáticas simples serem computáveis no sentido de Turing. Funções computáveis são operações matemáticas que podem ser simuladas por um aparelho real, um artefato do mundo físico, feito de partículas elementares submetidas às leis da natureza. Reciprocamente, o fato de máquinas reais ou "fenômenos naturais" serem bem descritos por simples funções matemáticas é equivalente ao fato de tantas dessas funções serem computáveis. Se todas as funções simples da matemática fossem não-computáveis, a matemática não nos pareceria um instrumento útil para descrever o mundo. Poderíamos ter teoremas ou verdades não-construtivos sobre o mundo, mas de pouca aplicabilidade prática.

MATEMÁTICA E FÍSICA: UM ETERNO TRANÇADO DE OURO

Do not infest your mind with beating on
*The strangeness of this business.**

WILLIAM SHAKESPEARE

A impressionante simbiose da matemática e da física pode ser ilustrada com exemplos que atravessam vários séculos. Essa relação possui também uma surpreendente simetria: há exemplos em que uma matemática já antiga se revela talhada sob medida para fundamentar uma descrição do mundo físico e há outros em que o desejo

* Não infestes tua mente debatendo-te contra a estranheza deste assunto. (N.T.)